LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 7

Pojam svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora

Lekcije iz Matematike 1.

7. Pojam svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obrađuju pojam te geometrijsko i fizikalno značenje svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora na primjerima matrica drugog reda.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Mrlja u obliku kruga, sastavljena od čestice jednoliko raspoređenih oko središta radijalno se širi; jedna od najjednostavnijih mogućnosti jest da to geometrijski bude dilatacija ili kontrakcija (u svim smjerovima). Takve se pojave opisuju skalarnim matricama (koje djeluju praktično kao brojevi).
Nešto složenija je situacija kad imamo takvo rastezanje koje je radijalno samo uzduž koordinatnih osiju (ali, možda, po svakoj osi s drugim intenzitetom); takvo se djelovanje opisuje dijagonalnim matricama.
Takvo djelovanje u ravnini koje je radijalno po dvama okomitim pravcima kroz ishodište, opisuje se simetričnim matricama. Slično vrijedi za prostor (i više dimenzije); to jedan od glavnih razloga važnosti simetričnih matrica i njihove uloge u primjenama - one su vrlo bliske brojevima, odnosno dijagonalnim matricama.

III. Potrebno predznanje

Ovo je potpuno novo gradivo; za usvajanje je potrebno razumjeti pojam vektora, matrice i djelovanja matrica na točke ravnine ili prostora (transformacija)

Primjer 1. (posebni smjerovi djelovanja nekih transformacija

U ovom ćemo primjeru, uz ostalo, razmatrati u što se transformiraju, pri djelovanju transformacije ravnine, kvadrat s vrhovima u $(\pm 1, \pm 1)$ i jedinična kružnica sa središtem u ishodištu (odnosno pripadni krug).

(i) Uočite da simetrija ravnine s obzirom na x-os, od svih pravaca koji prolaze ishodištem (smjerova) ima dva istaknuta:
x-os čiju svaku točku ostavlja na miru (**fiksni pravac**)
y-os koju ostavlja na miru, ali ne i njene točke (već ih zrcali s obzirom na ishodište).

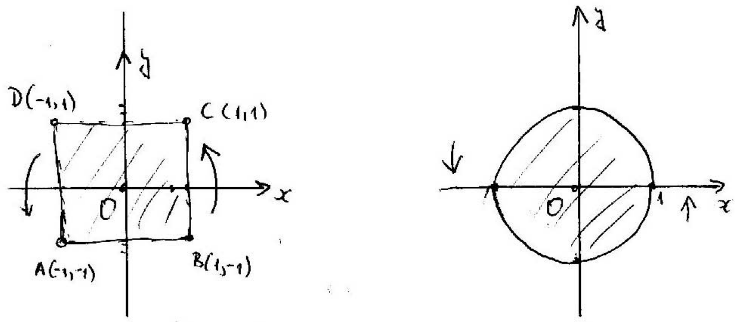
To se očituje i u njenom matričnom zapisu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

gdje se broj 1 odnosi na x, a broj -1 na y-os. To se vidi i iz djelovanja na jedinične vektore:

$$A(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}, \ A(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{j}$$

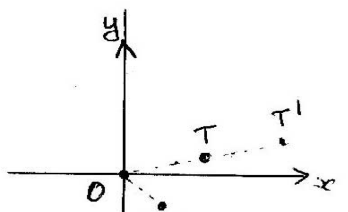
Uočite, također, da pri simetriji s obzirom na x-os, navedeni kvadrat i krug prelaze u sebe (samo se dio iznad osi x zamijenjuje s onim ispod) (sl.1).



Sl. 1.

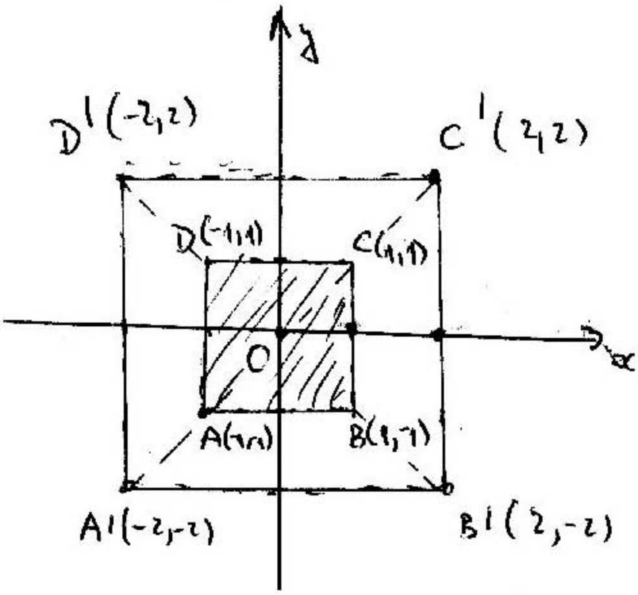
(ii) **Rotacija ravnine oko ishodišta za kut** nema istaknutih smjerova, osim ako je to rotacija za 0° ili 180° kad su svi smjerovi istaknuti.
Navedeni kvadrat i krug prelaze u neki drugi sukladni kvadrat ili krug (samo se zavrte).
Ishodište je jedina točka koja ostaje na miru (**fiksna točka**).

(iii) Skalarna matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ određuje homotetiju s obzirom na ishodište s koeficijentom 2 (dilataciju). Njoj su svi smjerovi kroz ishodište istaknuti (svaka se točka preslikava u točku na istoj zraci kroz ishodište, ali na dva puta većoj udaljenosti (sl.2).

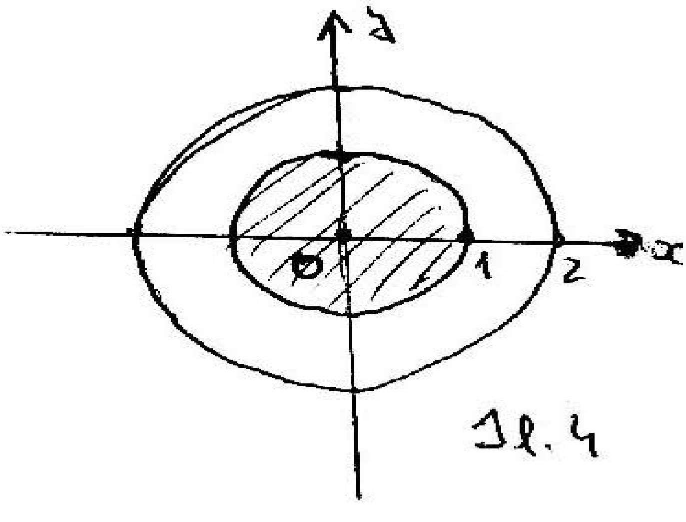


Sl. 2.

Pripadni kvadrat prelazi u kvadrat s vrhovima $(\pm 2, \pm 2)$ (sl.3), a krug u krug sa središtem u ishodištu polumjera 2(sl.4).



Sl. 3

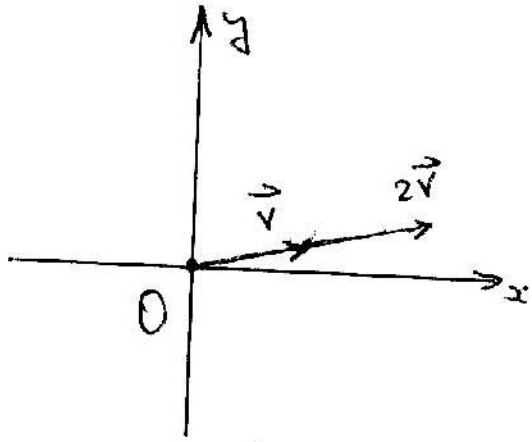


Sl. 4

I tu je ishodište jedina točka koja ostaje na miru.
Fizikalno, možemo zamišljati da je u jediničnom krugu oko ishodišta bila nakupina čestica, koja se radijalno širila neko vrijeme; novi krug predočuje novo stanje.
To što su ovdje svi smjerovi istaknuti (odnosno da po svim pravcima kroz ishodište transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 2), možemo zapisati kao:

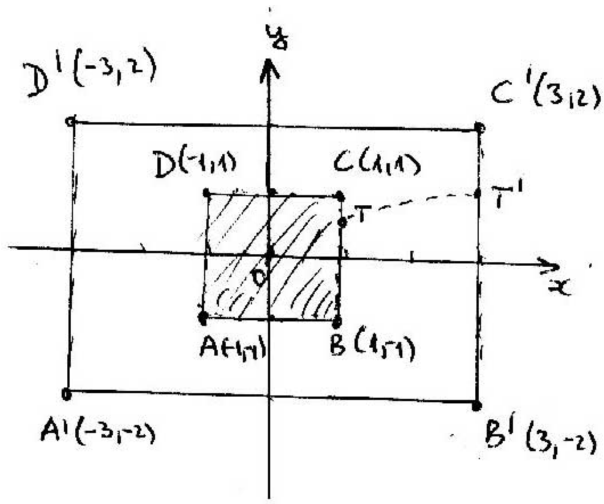
$$A(\overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{v}$$

za sve vektore $\overrightarrow{v}$ (sl.5).

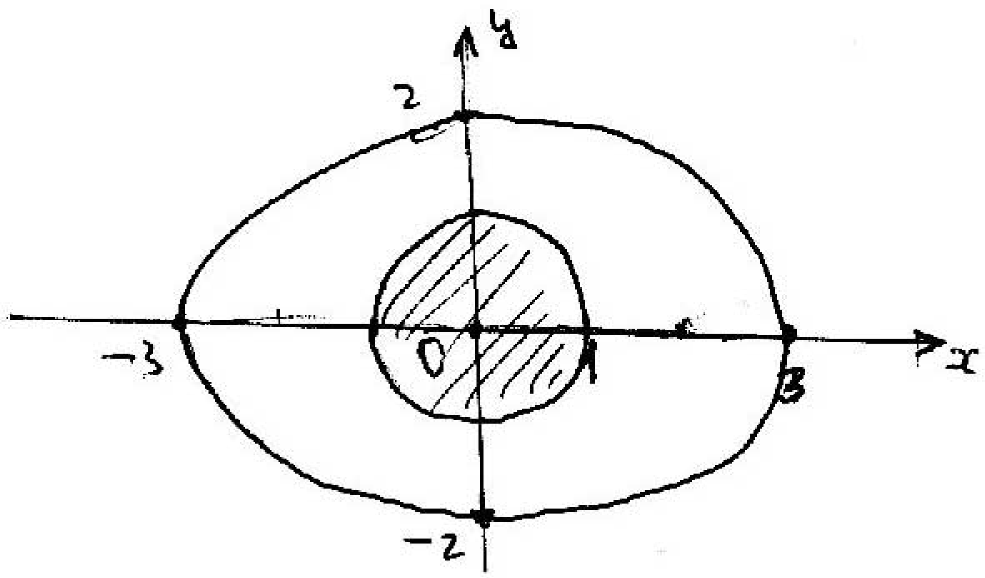


sl. 5.

(iv) Dijagonalna matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ određuje složeno rastezanje. Ima dva istaknuta smjera (tj. dva pravca kroz ishodište koji prelaze u sebe):
x-os koja odgovara broju 3 i na kojemu transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 3
y-os koja odgovara broju 2 i na kojemu transformacija djeluje kao dilatacija s koeficijentom 2
I tu je ishodište jedina točka koja ostaje na miru.
Pripadni kvadrat prelazi u pravokutnik s vrhovima $(\pm 3, \pm 2)$ (sl.6) , a jedinična kružnica u elipsu sa središtem u ishodištu s poluosima 3, odnosno 2 (sl.7).



sl. 6.



Sl. 7.

Na jeziku jednadžba imamo

$$x^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Fizikalno, možemo zamišljati da je u jediničnom krugu oko ishodišta bila nakupina čestica, koja se širila neko vrijeme, ali radijalno samo po koordinatnim osima i to različitim brzinama; zato čestice izvan koordinatnih osiju imaju otklon prema osi x. Također, čestice ostaju unutar kvadranata u kojima su bili na početku Mehanički možemo zamišljati da smo krug rastezali s obje strane x osi s koeficijentom 3, s obje strane y osi s koeficijentom 2; pri tom se krug deformirao u elipsu.
Dilatacije po x, odnosno y-osi u ovom primjeru možemo zadati i uvjetima:

$$A(\overrightarrow{i}) = 3\overrightarrow{i},\; A(\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{j}$$

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Svojstvena vrijednost i svojstveni vektor matrice.

U Primjeru 1. vidjeli smo da za dijagonalne matrice 2. reda postoje dva istaknuta smjera (svaki odgovara po jednom broju koji je na dijagonali te matrice; za skalarne matrice svi su smjerovi istaknuti). Postavlja se pitanje postoje li takvi smjerovi i za neke matrice koje nisu dijagonalne. Vidjet ćemo da takvi, međusobno okomiti smjerovi, postoje za simetrične matrice (vidjeli smo da za matrice koje odgovaraju rotacijama u ravnini takvi smjerovi ne postoje).

Kažemo da je broj λ **svojstvena vrijednost** matrice A ako postoji ne-nul vektor $\overrightarrow{v}$ tako da bude

$$A(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$$

a svaki takav $\overrightarrow{v}$ zove se **svojstveni vektor** matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Primjer 2. Za matrice iz Primjera 1. imamo.
(i) - simetrija s obzirom na x-os ima dvije svojstvene vrijednosti:
(I) broj 1, a svaki ne-nul vektor proporcionalan $\overrightarrow{i}$ pripadni je svojstveni vektor; zato je dovoljno reći da je $\overrightarrow{i}$ svojstveni vektor
(II) broj -1, sa svojstvenim vektorom $\overrightarrow{j}$.
(ii) - rotacije (osim dviju) nemaju svojstvenih vrijednosti ni vektora (točnije nemaju **realnih** svojstvenih vrijednosti ni vektora).
(iii)- homotetija s koeficijentom 2 ima jednu svojstvenu vrijednost: broj 2, a svaki ne nul vektor joj je svojstveni vektor.
(iv) - dijagonalna matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ima dvije svojstvene vrijednosti:
broj 3 sa svojstvenim vektorom $\overrightarrow{i}$
broj 2 sa svojstvenim vektorom $\overrightarrow{j}$

Primjer 3. (i) Pokažimo da su brojevi 1 i 6 svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
(ii) Odredimo pripadne svojstvene vektore.
(iii) Odredimo slike kvadrata odnosno jediničnog kruga pri ovoj transformaciji.

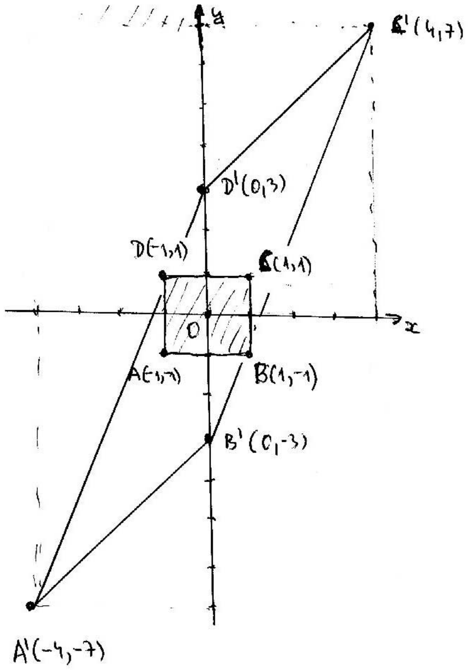
(i) i (ii). Označimo $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
tada uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 1 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

$$2x + 2y = x,\ 2x + 5y = y,\ tj.\ x = -2y$$

(sustav se svodi na jednu jednadžbu).
Netrivijalno rješenje (zbog ne-nul vektora) je, na primjer, $x = -2,\ y = 1$, tj. $\overrightarrow{v_1} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 1 (ostali su mu proporcionalni).
Uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 6 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

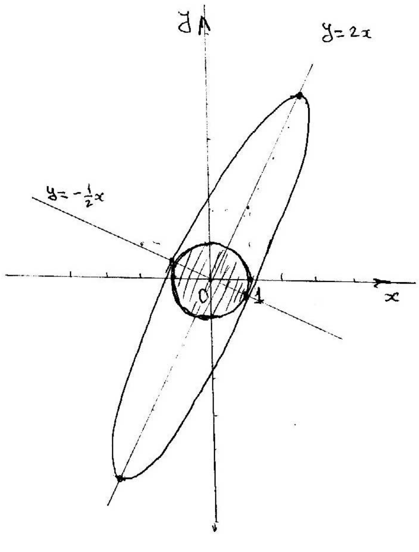
$$2x + 2y = 6x,\ 2x + 5y = 6y,\ tj.\ y = 2x$$

Netrivijalno rješenje je, na primjer, $x = 1,\ y = 2$, tj. $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 6 (ostali su mu proporcionalni).
Uočite da su vektori $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ okomiti, takvi su ujedno i pripadni istaknuti smjerovi (zadani jednadžbama $x = -2y$, odnosno $y = 2x$).
(iii) Kvadrat s vrhovima $(\pm 1, \pm 1)$ prelazi u paralelogram s vrhovima
$(4, 7), (0, 3), (-4, -7), (0, -3$ (sl.8).



Sl.8.

Jedinična kružnica prelazi u **elipsu** sa središtem u ishodištu i poluosima duljine 1 (na istaknutom pravcu s jednadžbom $x = -2y$), odnosno 6 (na istaknutom pravcu s jednadžbom $y = 2x$) (sl.9).



Sl. 9.

Geometrijski, ta je elipsa nastala rastezanjem s koeficijentom 6 uzduž pravca s jednadžbom $y = 2x$.

Također, možemo zamišljati da se nakupina čestica u jediničnom krugu širi tako da čestice na pravcu s jednadžbom $x = -2y$ (tj. na pravcu s jednadžbom $y = -\frac{1}{2}x$) ostaju na miru, čestice na pravcu $y = 2x$ šire se radijalno, a ostale da imaju otklon prema pravcu $y = 2x$. Pritom čestice ne izlaze iz kvadranata određenih istaknutim smjerovima.

Primjer 4. (i) Pokažimo da su brojevi 2 i 1 svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
(ii) Odredimo pripadne svojstvene vektore.
(iii) Odredimo slike kvadrata odnosno jediničnog kruga pri ovoj transformaciji.

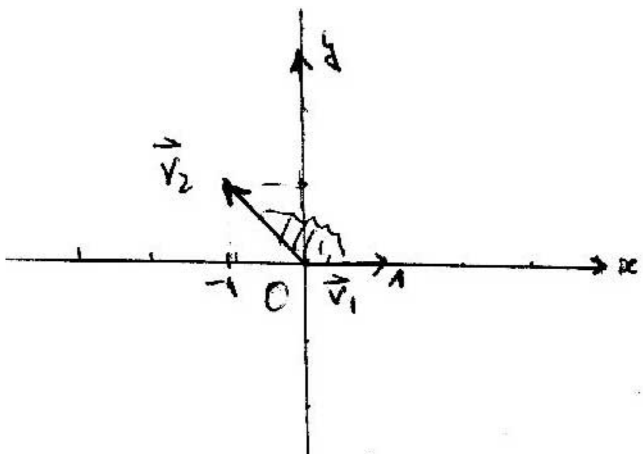
(i) i (ii) Uz oznake kao u rješenju Primjera 3., uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 2 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

$$2x + y = 2x,\ y = 2y,\ tj.\ y = 0$$

pa je x-os istaknut smjer za svojstvenu vrijednost 2, tj. $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 2.
Uvjet $A(\overrightarrow{v}) = 1 \cdot \overrightarrow{v}$ postaje linearni sustav

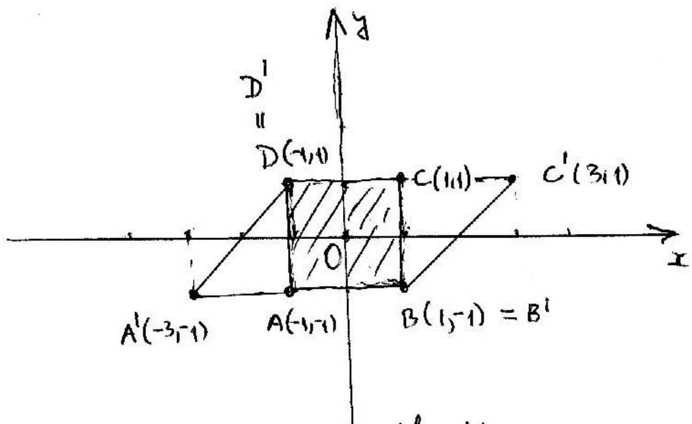
$$2x + y = x,\ y = y,\ tj.\ y = -x$$

Netrivijalno rješenje je, na primjer, $x = -1$, $y = 1$, tj. $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednost 1.
Uočite da vektori $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ **nisu okomiti**, ujedno ni pripadni istaknuti smjerovi (zadani jednadžbama $y = 0$, odnosno $y = -x$) (sl.10).



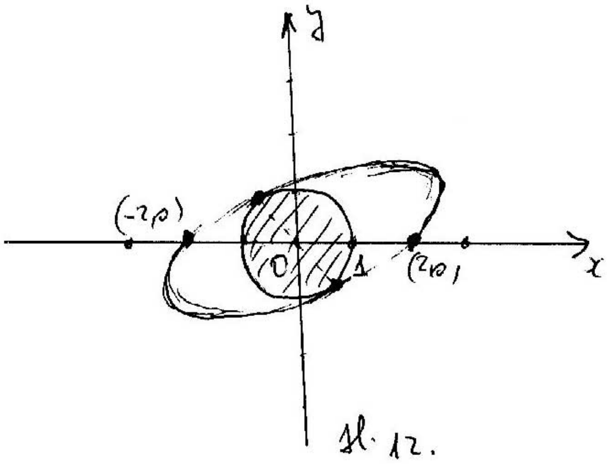
sl. 10

(iii) Kvadrat s vrhovima $(\pm 1, \pm 1)$ prelazi u **paralelogram** s vrhovima $(3,1), (-1,1), (-3,-1), (1,-1)$ (sl.11).



sl. 11.

Jedinična kružnica prelazi u **elipsu** sa središtem u ishodištu i poluosima koji **nisu** na istaknutim smjerovima i treba ih posebno određivati (sl.12).



sl. 12.

Možemo zamišljati da se nakupina čestica siri tako da čestice na pravcu $y = -x$ ostaju na miru, čestice na x-osi šire se radijalno, a ostale da imaju otklon prema x-osi (gdje je veća svojstvena vrijednost). Pritom čestice ne izlaze iz kosih kvadranata određenih istaknutim smjerovima.

Metoda određivanja svojstvenih vrijednosti. Iz prethodnih smo primjera vidjeli kako se određuju svojstveni vektori, ako su poznate svojstvene vrijednosti. Sad ćemo na primjeru matrica 2-og reda pokazati kako se određuju svojstvene vrijednosti (ista će metoda biti primjenjiva i na bilo koje matrice). Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bilo koja matrica 2. reda. Uvjet $A(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$ svodi se na sustav:

$$ax + by = \lambda x,\ cx + dy = \lambda y,\ tj.\ (a - \lambda)x + by = 0,\ cx + (d - \lambda y) = y$$

Ako želimo da taj sustav, osim očitog trivijalnog rješenja $(0,0)$, ima i neko netrivijalno (jer mora biti $\overrightarrow{v} \neq 0$), determinanta sustava mora biti 0 (inače bi rješenje bilo jedinstveno: $x = y = 0$). Dakle, treba biti

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ tj.\ \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

To je kvadratna jednadžba pa može imati dva realna, dvostruko realno ili kompleksno-konjugirana rješenja.

Primjer 5. Odredimo formulom svojstvene vrijednosti:
(i) dijagonalne matrice
(ii) matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ iz Primjera 3.
(iii) matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ iz Primjera 4.
(iv) matrice rotacije $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(i) Već smo na primjerima vidjeli da su brojevi a, d na dijagonali dijagonalne matrice (drugog reda), svojstvene vrijednosti te matrice. Isto se dobije formulom:
$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$, zbog $b = c = 0$ postaje, $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad = 0$, s rješenjima $\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = d$.
(ii) Tu je $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, pa je $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$ (kako smo već provjerili).
(iii) Tu je $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, pa je $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$ (kako smo već provjerili - uočite da su ta dva broja na dijagonali matrice; slično vrijedi za svaku gornju trokutastu ili donju trokutastu matricu).
(iv) Goemetrijskim smo argumentima zaključili da ta matrica (osim dvaju izuzetaka) nema istaknutih smjerova; to znači da joj svojstvene vrijednosti nisu realni brojevi. Isto se dobije formulom: $\lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0$, tj. $\lambda^2 - 2\cos\alpha \cdot \lambda + 1 = 0$;
diskriminanta te jednadžbe je $D = 4\cos^2\alpha - 4$, što je < 0 osim ako je $\cos\alpha = \pm 1$, a to je za $\alpha = 0°$ ili $\alpha = 180°$.

Primjer 6. Simetrične matrice imaju realne svojstvene vrijednosti i okomite pripadne svojstvene vektore.

Tu je $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) = 0$, jer je $c = b$, pa je diskriminanta $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + b^2$, što je > 0 (pa imamo dva različita realna rješenja) osim ako je $a = d$ i $b = 0$ (skalarna matrica kad su svi vektori svojstveni).
Okomitost ćemo dokazati posebno.